Repetition från igår

$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

med matris A.

dec 1-08:01

Finns $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$

med

$\bar{u} \parallel T(\bar{u})$?

$(\bar{u} \neq 0)$

skalär

Alltså

$T(\bar{u}) = a\bar{u}$

dec 1-08:01

De möjliga värdena på a kallas

egenvärden

till T (eller A)

dec 1-08:01

Dessa är rötter till karaktäristiska ekvationen

(sekularekvationen)

dec 1-08:01

dvs rötter till

$$\det(A - xI) = 0$$

polynomekvation

av grad n

dec 1-08:01

Alltså;

- högst n st olika egenvärden.
- Svårt att lösa för stora n.

dec 1-08:07

För $n=1,2,3$ kan vi göra för hand.

Ni gissar rötter för $n=3$ och använder faktorsatsen för att hitta resten.

dec 1-08:08

När vi har egenvärde a kan vi hitta alla egenvektorer med egenvärde a genom G.E.

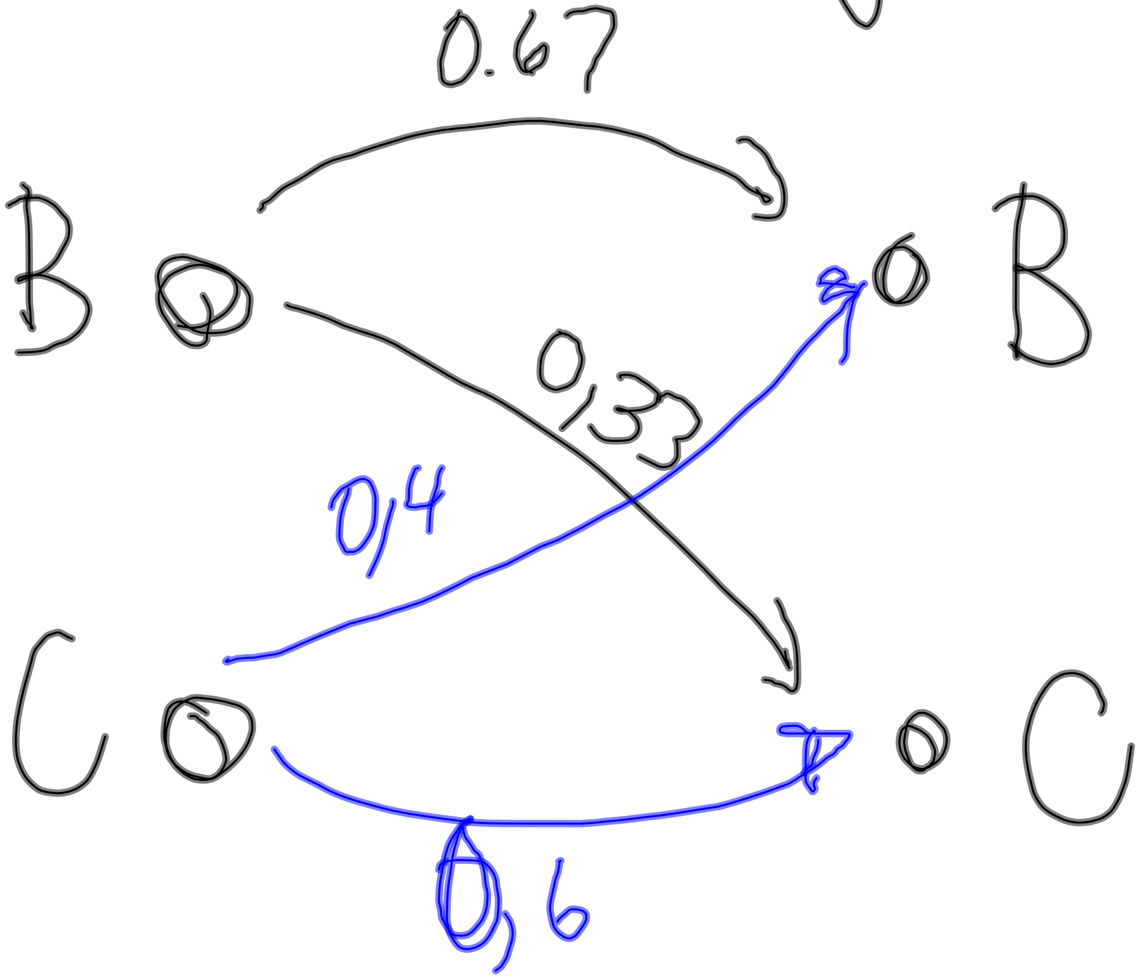
$$(A - aI \mid 0)$$

dec 1-08:10

Vi kan hitta fel
i räkningarna om
det inte finns
icke-trivial lösning.

dec 1-08:12

Markovkedjor



dec 1-08:17

Utfallsvektor

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

p_1 = Sannolikhet för att vi är i B

p_2 = —— " —— ——— " —— C

dec 1-08:20

Vi räknar exempel för hand:

A

dec 1-08:21

Utfallsvektor

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

p_1 = Sannolikhet för att vi är i B

p_2 = —"— —"— C

Vi räknar exempel för hand:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}67 & 0{,}4 \\ 0{,}33 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}(0) = \begin{pmatrix} 0{,}67 \\ 0{,}33 \end{pmatrix}$$

dec 1-08:23

$$\bar{x}(1) = A\bar{x}(0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0,67 & 0,4 \\ 0,33 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,67 \\ 0,33 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5809 \\ 0,4191 \end{pmatrix}$$

dec 1-08:24

Vi kan upprepa (iterera) och få

$$\bar{x}(i+1) = A\bar{x}(i)$$

$$= A(A\bar{x}(i-1))$$

$$= \ldots = A^{i+1}\bar{x}(0)$$

dec 1-08:25

Vi får ofta att

$$\lim_{i \to \infty} \bar{X}(i) = \bar{X}(\infty)$$

<u>Sats</u> $\bar{X}(\infty)$ måste då vara egenvektor med egenvärde 1.

dec 1-08:27

$$\bar{x}(\infty) =$$

$$\lim_{i \to \infty} \bar{x}(i) =$$

$$= \lim_{i \to \infty} \bar{x}(i+1)$$

$$= \lim_{i \to \infty} A\bar{x}(i)$$

$$= A\bar{x}(\infty)$$

dec 1-08:31

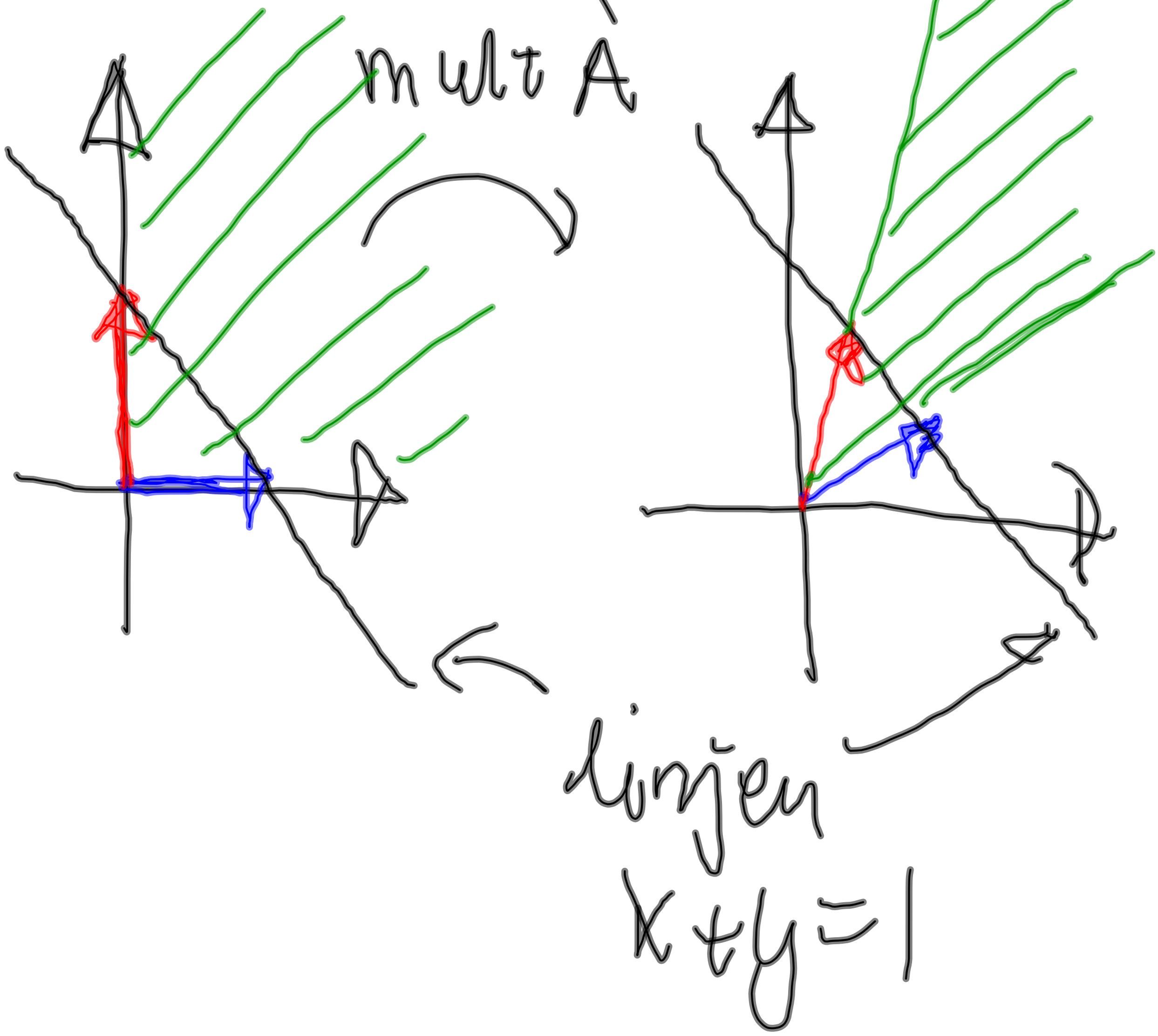
I praktiken kommer $\bar{x}(i)$ att närma sig $\bar{x}(\infty)$ om vi får att

$$\bar{x}(i+1) = A\bar{x}(i) \approx \bar{x}(\infty)$$

dec 1-08:33

Geometriskt exempel

Ta $A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$



dec 1-08:34

Bilden av den gröna konen blir smalare och smalare när vi itererar.

dec 1-08:38

Vi kan beräkna

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9 & 4/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}$$

dec 1-08:39

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/9 & 4/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14/27 & 13/27 \\ 13/27 & 14/27 \end{pmatrix}$$

dec 1-08:41

$$A^{\infty} = \lim_{i \to \infty} A^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(\infty) = A^{\infty} \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

oberoende av $\bar{x}(0)$.

dec 1-08:42

Eftersom $\bar{x}(\infty)$

är en egenvektor

med egenvärde 1

fås den från

$$\left(A - I \,\middle|\, 0\right)$$

med G.E.

dec 1-08:44

Vi får en lösning till detta exempel(?)

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dec 1-08:45

lösningen blir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Välj t så att

$$x+y=1$$

dvs $t=\frac{1}{2}$.

dec 1-08:46

PageRank

$W_1, W_2, \ldots, W_N$

med länkar

får vi matris

A med

dec 1-09:05

$$a_{ij} = \frac{\# W_j \mapsto W_i}{\# \text{länkar på } W_j}$$

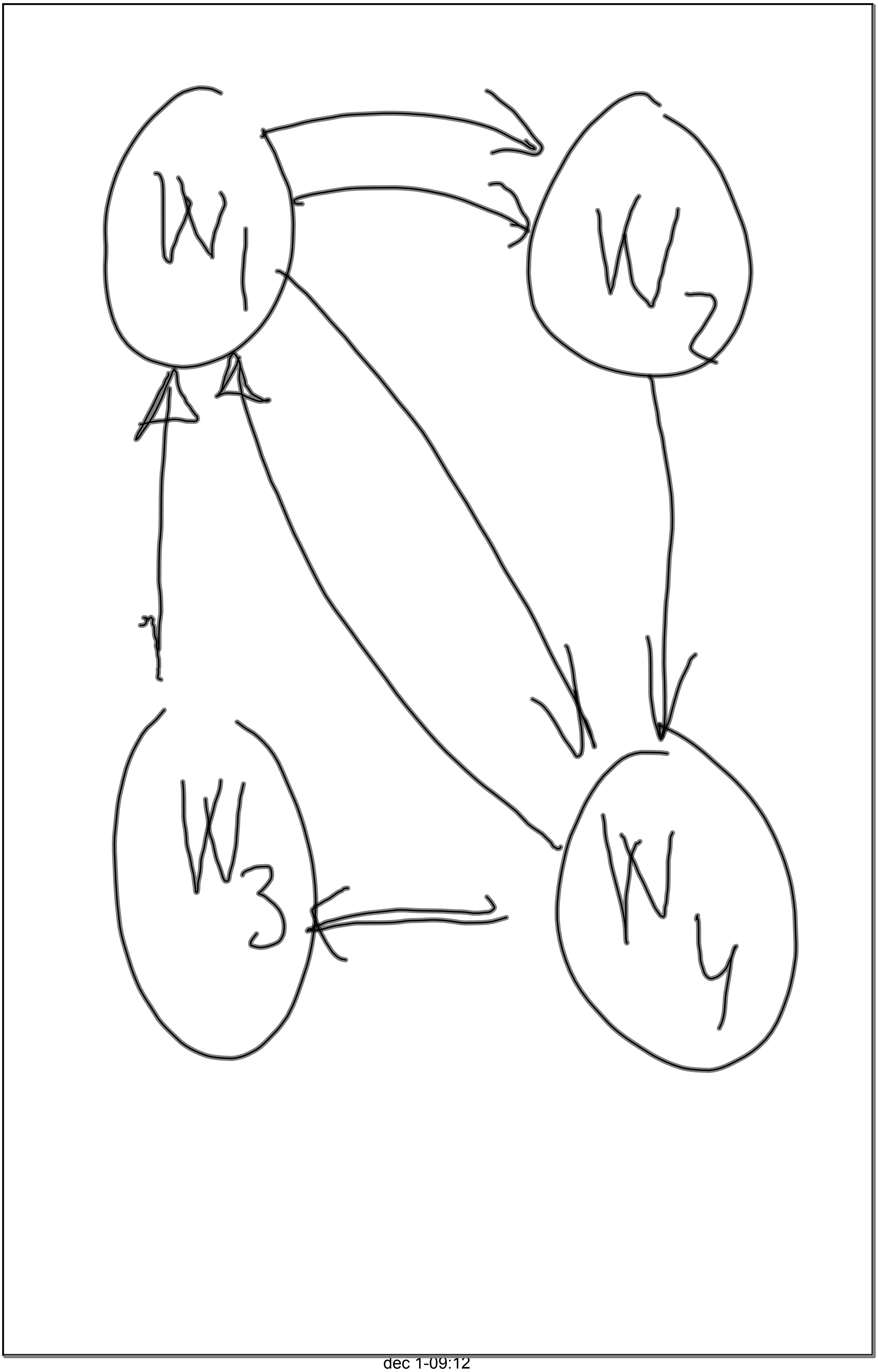
Det blir en stokastisk matris.

dec 1-09:10

Rangvektorn blir en egenvektor med egenvärde 1.

Exempel

dec 1-09:11



dec 1-09:12

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dec 1-09:13

Vi kan beräkna rangvektorn genom att ta egenvektorn med egenvärde 1.

Gausselimination på $A - I$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 2/3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad 2/3 \quad 1/3 \quad \sim$$

dec 1-09:15

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -5/6 & 0 \end{array}\right) \; 1 \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \; -1$$

dec 1-09:16

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$r_4 = t$$

$$r_3 = \frac{1}{2} \cdot t$$

$$r_2 = \frac{2}{3} r_3 + \frac{1}{3} r_4 = \frac{2}{3} t$$

$$r_1 = r_3 + \frac{1}{2} r_4 = t$$

dec 1-09:19

Alltså är

$$\bar{r} = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)t$$

Två sidor högst vinkelräta: W_1, W_4

dec 1-09:21

Vi kan normera och få en utfallsvektor

$$\bar{x}(\infty) = \left(\frac{6}{19}, \frac{4}{19}, \frac{3}{19}, \frac{6}{19}\right)$$

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{19}{6}$$

dec 1-09:23

Uppgifter

7.13 Bestäm egenvärden och egenvektorer till

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dec 1-09:28

Börja med $A-xI$

och beräkna det.

$$\begin{vmatrix} 2-x & -1 & -1 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 2 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x) \begin{vmatrix} -1-x & 0 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} =$$

dec 1-09:29

$$= (2-x)(-1-x)(1-x)$$

Egenvärdena är nollställena till detta polynom, dvs $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ $x_3 = 1$.

dec 1-09:30

Egenvektorer fås genom Gausselim.

i) $\lambda_1 = 2$ $\left(A - 2I \mid 0\right)$

dvs

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \boxed{1} \quad -3 \quad 2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x = t,\ y = z = 0$

Alltså egenvektorer

$(x, y, z) = t(1, 0, 0),\ t \neq 0.$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dec 1-09:33

Andra; $\lambda_2 = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \frac{1}{3} \\ \\ \end{array}$$

$z = t,\ y = -z = -t$

dec 1-09:38

om

$$x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 0$$

Alltså egenvektorer

$$(x, y, z) = t(0, 1, 1)$$

$t \neq 0.$

Testa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dec 1-09:40

Sist: $x_3 = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad 1 \ \boxed{\tfrac{1}{2}} \quad t$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$z = t,\ y = 0,\ x = y + z = t$

dec 1-09:42

Alltså egenvektorer

$$(x,y,z) = t(1,0,1)$$

Testa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dec 1-09:43

b) och c) i INL

i matlab

Man kan lösa

$$Ax=b$$

med kommando

$$x=A\backslash b$$

dec 1-09:45